INGENIERIA DIDACTICA

DE LA FUNCION EXPONENCIAL

MME. LAURA MA. RIVERA BECERRA

laura.rivera@itesm.mx

CAMPUS ZACATECAS

Tema: Uso específico de la tecnología
en el proceso de enseñanza-aprendizaje

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen\,x$$

INGENIERIA DIDACTICA
LA FUNCION EXPONENCIAL

ANÁLISIS PRELIMINAR

CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

OBJETIVO

EXPERIMENTACIÓN

CONTEXTO DE LA ACTIVIDAD

INCIDENTES CRÍTICOS

CONCLUSIÓN

REFERENCIAS

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$$

ANÁLISIS PRELIMINAR

CONOCIMIENTOS PREVIOS

SOBRE NÚMEROS COMPLEJOS: SU DEFINICIÓN, LA IDENTIDAD DE EULER Y OPERACIONES BÁSICAS.

CONCEPTO DE FUNCIONES, DOMINIO E IMAGEN

DE TRIGONOMETRÍA CONOCER LAS FUNCIONES sen(x) Y cos(x), SU GRAFICA, ÁNGULOS ESPECIALES, Y COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN AL SER MULTIPLICADA POR UNA CONSTANTE.

CARACTERÍSTICAS DEL GRUPO

INQUIETOS, PLATICADORES, ENTUSIASTAS Y MOTIVADOS

GUSTAN DE COMPETIR ENTRE ELLOS, INDIVIDUALMENTE O EN EQUIPO, SELECCIONADOS POR ELLOS MISMOS O POR EL PROFESOR.

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

ANÁLISIS PRELIMINAR

PROCESOS DE RESOLUCIÓN

PARA ESTE MOMENTO YA SE HAN ANALIZADO EN EL CURSO DE CÁLCULO DIFERENCIAL DE PREPARATORIA, LAS CARACTERÍSTICAS GRÁFICAS Y ANALÍTICAS DE FUNCIONES LINEALES, POLINOMIALES, ESCALONADAS Y TRIGONOMÉTRICAS, ENTRE OTRAS. HACIENDO ÉNFASIS EN DETERMINAR EL DOMINIO E IMAGEN DE LA FUNCIÓN PARA CARACTERIZARLA.

SE TRABAJÓ CON FUNCIONES EXPONENCIALES DEL TIPO a^x DONDE a ES UN ENTERO POSITIVO Y $x \in \mathbb{R}$. DONDE SE ANALIZÓ EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCIÓN PARA DIFERENTES VALORES DE a, DETERMINANDO NUEVAMENTE EL DOMINIO Y LA IMAGEN.

ID

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i sen.$

CONCEPCIÓN Y ANÁLISIS A PRIORI

EL ALUMNO CONOCE QUE LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ax}$ ES MONÓTONA.

LA IDENTIDAD DE EULER SE LLEGA A MENCIONAR EN TRIGONOMETRÍA, EN TEORÍA DE CONJUNTOS, O EN ÁLGEBRA EN SU FORMA DE EXPANSIÓN DE $(\cos z \oplus i \operatorname{sen} z)^n=\cos(nz)\oplus i \operatorname{sen}(nz)$ DONDE i ES LA UNIDAD IMAGINARIA, PERO NO SE LOGRA LA VINCULACIÓN CON LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ax}$.

EL **OBJETIVO** ES OBSERVAR QUE DIFICULTADES SE PRESENTAN AL ESTUDIAR LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ax}$ GRAFICA Y ANALÍTICAMENTE. CONSIDERANDO EL CAMPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS COMO POSIBLES VALORES QUE PUEDE TOMAR a, ESTO NOS LLEVARÁ A QUE LOS ALUMNOS PUEDAN AMPLIAR SU VISIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL, CONSIDERANDO LA DOBLE IMAGEN QUE TIENE DEPENDIENDO DEL CAMPO EN EL QUE SE TRABAJE.

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i \operatorname{sen} x$

ID

EXPERIMENTACIÓN

SE CONTEMPLAN TRES ETAPAS EN UNA SESIÓN DE 90 MINUTOS:

I. SERIE DE PREGUNTAS

II. ANÁLISIS DE LOS CASOS REALES

III. ANÁLISIS DE LOS CASOS COMPLEJOS

ID

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

EXPERIMENTACIÓN

PRIMER ETAPA: SERIE DE PREGUNTAS (10 A 15 MIN)

SE FORMARAN EQUIPOS DE 3 A 5 ALUMNOS COMO MÁXIMO, PIDIÉNDOLES QUE RESPONDAN A CUATRO PREGUNTAS, TENIENDO CINCO MINUTOS PARA DISCUTIR Y CONSENSAR SUS RESPUESTAS.

Las preguntas son:	¿Que tipo de respuestas esperamos? Continuando con la inercia del conocimiento adquirido:
En la función $f(x)=e^{ax}$ 1. ¿Qué valores puede tomar a? 2. ¿Cuántos casos tenemos por analizar? 3. ¿Cuál es el dominio para cada caso? 4. ¿Cuál es la imagen para cada caso?	1. Enteros, reales, ocasionalmente mencionaran cualquier número, que nos dará la pauta para nuevamente preguntar en la tercer etapa ¿cuantos tipos de números hay?. 2. Dos casos: enteros y fraccionarios; positivos y negativos. 3. Confiamos que inequívocamente la respuesta sea los reales. 4. Para uno los reales positivos y para otro los reales negativos.

EXPERIMENTACIÓN

SEGUNDA ETAPA: ANÁLISIS DE LOS CASOS REALES (15 A 20 MIN)

ESTA ETAPA SE ESPERA MUY SENCILLA, POR HABER SIDO ANALIZADA EN EL CURSO DE BACHILLERATO, SIN EMBARGO NO DEBE DARSE POR SOBREENTENDIDA, APROVECHAREMOS PARA RECORDAR LA CARACTERIZACIÓN GRÁFICA Y ANALÍTICA PARA LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ax}$ CON SUS DOS CASOS $a<0$ Y $a>0$, IDENTIFICANDO DOMINIO E IMAGEN.

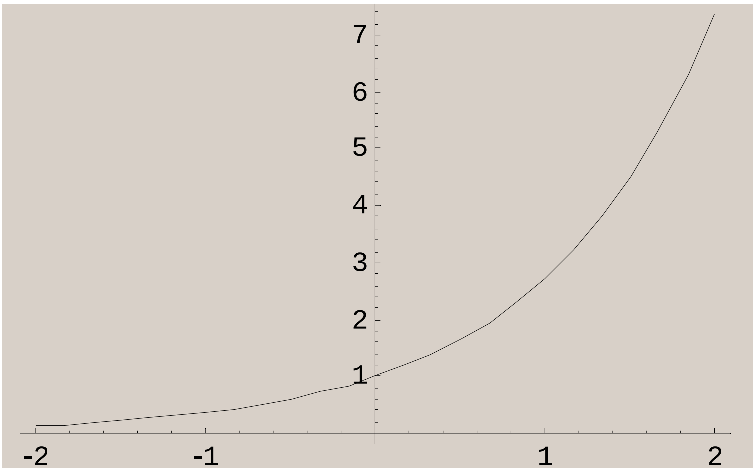
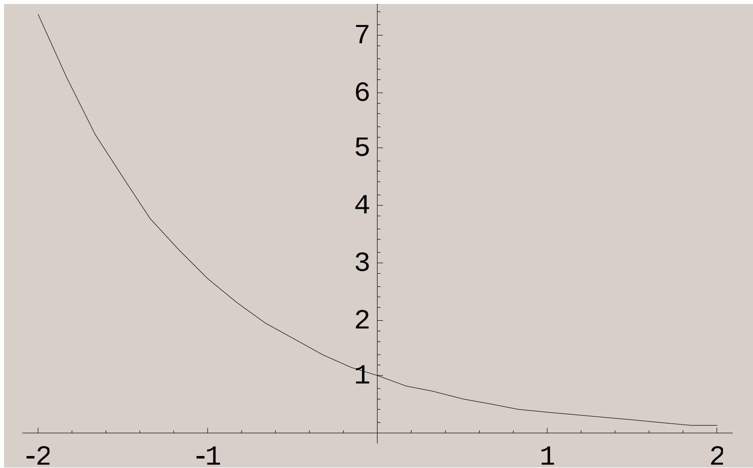
$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$

E

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

EXPERIMENTACIÓN

PEDIREMOS A LOS ALUMNOS QUE GRAFIQUEN LOS CASOS REALES, HACIENDO HINCAPIÉ EN QUE EL INTERÉS ESTÁ EN EL BOSQUEJO Y NO EN LA EXACTITUD. ESPERAMOS TENER RESPUESTAS COMO LAS SIGUIENTES:

Caso 1Real	Caso 2Real
	
Dominio:($-\infty,\infty$)	Dominio: ($-\infty,\infty$)
Imagen: ($0,\infty$)	Imagen: ($0,\infty$)

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$$

EXPERIMENTACIÓN

TERCER ETAPA: ANÁLISIS DE LOS CASOS COMPLEJOS (55 A 60 MIN)

PREGUNTAREMOS ¿CUÁNTOS TIPOS DE NÚMEROS HAY? AL LLEGAR A LA RESPUESTA DE REALES Y COMPLEJOS DESTACAMOS QUE EN LA ETAPA ANTERIOR CONSIDERAMOS A LOS NÚMEROS REALES Y AHORA INICIAMOS EL ANÁLISIS DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS.

AL CONSIDERAR QUE a PUEDE SER UN NÚMERO COMPLEJO, LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ax}$ TENDRÁ DOS CASOS MÁS, EL PRIMERO CUANDO A TIENE PARTE REAL E IMAGINARIA Y EL SEGUNDO CUANDO A SOLAMENTE TIENE PARTE IMAGINARIA.

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i sen x$

EXPERIMENTACIÓN

EN EL PRIMERO TENEMOS $a=b+ic$, EVALUANDO EN LA FUNCIÓN $f(x)=e^{(b+ic)x}$ QUE RESCRIBIÉNDOLA, UTILIZANDO LEYES DE LOS EXPONENTES TENEMOS $f(x)=e^{bx}e^{icx}$ DONDE AL SUSTITUIR LA IDENTIDAD DE EULER SE LLEGA A $f(x)=e^{bx}[\cos(cx)+i\,sen(cx)]$. ÉSTA ULTIMA EXPRESIÓN SE SUBDIVIDIRÁ PARA LOS VALORES DE $b<0$ y $b>0$.

PARA EL SEGUNDO TENEMOS LA FUNCIÓN $f(x)=e^{ibx}$ DONDE AL SUSTITUIR LA IDENTIDAD DE EULER SE LLEGA A $f(x)=\cos(bx)+i\,sen(bx)$

EXPERIMENTACIÓN

EN ESTE MOMENTO ES CONVENIENTE RECORDAR EL TRAZO DE LAS FUNCIONES sen(x) y cos(x), IDENTIFICAMOS LOS VALORES DE LAS DOS FUNCIONES PARA ÁNGULOS ESPECIALES (0º, 30°, 45°, 60°, 90° Y SUS PRIMEROS MÚLTIPLOS), Y PEDIMOS QUE LOS GRAFIQUEN.

PREGUNTAMOS NUEVAMENTE SI RECUERDAN QUE PASA CON LAS FUNCIONES sen(x) y cos(x) AL MULTIPLICARLAS POR UNA CONSTANTE Y GRAFICAMOS ALGUNOS CASOS.

AHORA PEDIMOS ENCONTRAR LA GRÁFICA DE LAS FUNCIONES f(x)=xsen(x) y f(x)=xcos(x), PARA ESTO NOS SERVIRÁ EL GRAFICADOR.

EXPERIMENTACIÓN

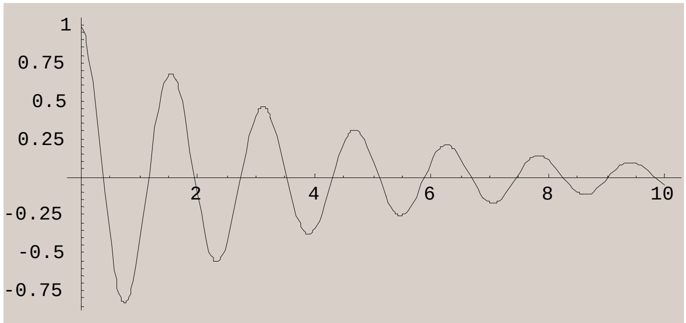
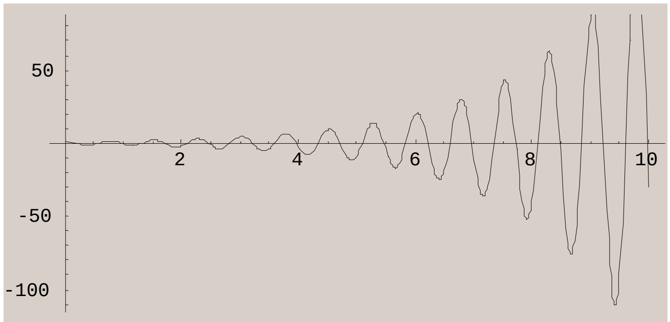
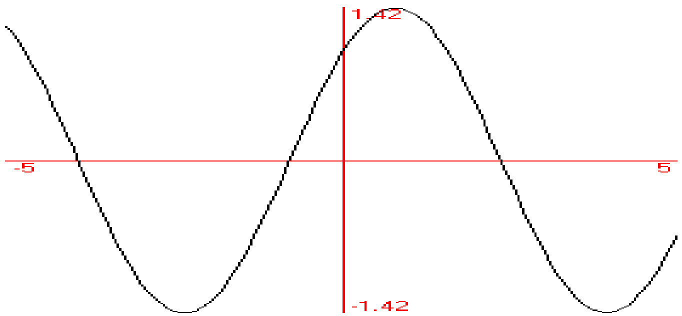
UNA VEZ REALIZADAS LAS GRAFICAS ANTERIORES, YA ESTAMOS LISTOS PARA PREGUNTAR:

¿CÓMO GRAFICAMOS $f(x)=\cos(bx)+i\mathrm{sen}(bx)$ y $f(x)=e^{bx}\,[\cos(bx)+i\mathrm{sen}(bx)]$?

PODEMOS PROPONER HACER CASO OMISO DE LA UNIDAD 'i RECORDANDO QUE EL INTERÉS SE ENCUENTRA EN EL BOSQUEJO DE LA GRÁFICA.

EXPERIMENTACIÓN

FINALMENTE GRÁFICAMENTE SE LLEGARÁ A ALGO PARECIDO A:

Caso 1 Complejo Para b<0		Dominio $(-\infty,\infty)$ Imagen $(-\infty,\infty)$
Caso 2 Complejo Para b>0		Dominio $(-\infty,\infty)$ Imagen $(-\infty,\infty)$
Caso 3 Complejo Solamente parte imaginaria		Dominio $(-\infty,\infty)$ Imagen $(-\sqrt{2},\sqrt{2})$

$$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen\,x$$

E

ES MUY IMPORTANTE QUE PARA LA TERCER ETAPA, LOS ALUMNOS TRABAJEN CON UN GRAFICADOR EN UNA COMPUTADORA PORTÁTIL O SOLICITAR LAS AULAS ACTIVAS CEC PARA REALIZAR ESTA SESIÓN.

AQUÍ NOS ENCONTRAMOS CON LA JUSTIFICACIÓN DEL PODER DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL, DEPENDIENDO DEL CAMPO EN EL QUE SE ENCUENTRE DEFINIDA, EL DOMINIO SIEMPRE SERÁN LOS NÚMEROS REALES Y LA IMAGEN DEPENDERÁ DEL CAMPO NUMÉRICO EN EL QUE SE TRABAJE, ESTAS CUALIDADES HACEN QUE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL FACILITE LA MODELACIÓN DE CUALQUIER FENÓMENO.

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$

CONTEXTO DE LA ACTIVIDAD

SE APLICA EN GRUPOS DE PREPARATORIA EN LOS CURSOS DE CALCULO DIFERENCIAL E INTEGRAL.

LOS ALUMNOS IDENTIFICAN LA VISIÓN LIMITADA Y LIMITANTE QUE TENÍAN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL.

ESTA CONCEPCIÓN ES IMPORTANTE PARA EL CURSO DE ECUACIONES DIFERENCIALES, DONDE LAS SOLUCIONES TENDRÁN LA FORMA $f(x)=e^{ax}$, QUE REPRESENTAN UNA GAMA DE POSIBILIDADES, ENTRE OTRAS:

MONÓTONA CRECIENTE O DECRECIENTE

OSCILANTE PERIÓDICA, CRECIENTE O DECRECIENTE

EL ALUMNO, AL NO CONOCER ESTA DOBLE VISIÓN DE LA FUNCIÓN EXPONENCIAL, MONÓTONA/OSCILANTE, TIENEN UN OBSTÁCULO PARA ENTENDER LA IMPORTANCIA DE ESTA FUNCIÓN EN LA SIMULACIÓN.

ID

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen\,x$

TECNOLÓGICO DE MONTERREY.

INCIDENTES CRÍTICOS

DURANTE EL DESARROLLO DE ESTA ACTIVIDAD, UNA ALUMNA SE INCOMODÓ MUCHO DE QUE NO CUMPLIERA CON MI OBLIGACIÓN DE DECIRLE HACIA DONDE TENÍA QUE LLEGAR. EN DIDÁCTICA ESTA SITUACIÓN IMPACTA EL "CONTRATO DIDÁCTICO O DE APRENDIZAJE", EN EL CUAL LOS ALUMNOS ASUMEN QUE EL PROFESOR ES UN TRANSMISOR DE CONOCIMIENTOS, CONTRARIO A ESTA IDEA, EN ESTA ACTIVIDAD SE PRETENDE DESARROLLAR LA COMPETENCIA DE APRENDER A APRENDER, QUE EL ALUMNO SEA AUTÓNOMO Y UTILICE EL CONJUNTO DE CONOCIMIENTOS PREVIOS PARA CONSTRUIR UNO NUEVO.

ID

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i\,sen.$

INCIDENTES CRÍTICOS

ALGUNOS ALUMNOS SE SORPRENDIERON DE CÓMO PUDIERON VISUALIZAR EL COMPORTAMIENTO DE LA FUNCION EXPONENCIAL EN EL CAMPO DE LOS NÚMEROS COMPLEJOS. EN LA MATEMÁTICA, ES MUY IMPORTANTE DESARROLLAR EN LOS ALUMNOS LA INTELIGENCIA ESPACIAL YA QUE ES UNA HERRAMIENTA FUNDAMENTAL PARA EL ANÁLISIS MATEMÁTICO Y EL DISEÑO, ENTRE OTROS.

CONCLUSIÓN

EL USO DE LAS TECNOLOGÍAS DE INFORMACIÓN Y COMUNICACIÓN EN EL AULA DE CLASE, ES UNA HERRAMIENTA ÚTIL QUE PERMITE VISUALIZAR, DISEÑAR Y CREAR ESCENARIOS DIDÁCTICOS DURANTE LA LABOR DIARIA EN CLASE, ASIMISMO, DESARROLLA LA COMPETENCIA DE USO DE LA TECNOLOGÍA EN LOS ALUMNOS.

TECNOLÓGICO DE MONTERREY

REFERENCIAS

Artigue, Michéle; *"Ingeniería didáctica en educación matemática"*; Ed. Iberoamérica; México; 1995.

Chevallard, Yves; *"La transposición didáctica: del saber sabio al saber enseñado"*; 3ª Ed. AIQUE; Argentina; 1998

Edwards, C. H.; *The Historical Development of the Calculus*; Ed. Springer-Verlag New York; USA.

Leithold, Louis; *"El Cálculo con Geometría analítica"*,.Ed. UTHEA, México; 1991

http://www.monografias.com/trabajos10/historix/historix.shtml#RENACIMIENTO (16/febrero/2005 13:49)

$e^{\pm ix} = \cos x \pm i sen x$

ID